Fibonacciaserien som talbas

Paul Sundvall

2008-03-15

1 Inledning

Fibonacciserien är en serie som definieras av

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 0; \\ 1 & \text{om } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{om } n > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Serien har många intressanta egenskaper. En kul sak man kan ha den till är att ha den som talbas. Det innebär att för ett godtyckligt positivt heltal x kan skriva x som summan av element ur Fibonacciserien. Jag ska försöka visa att så är fallet genom att konstruera en algoritm för det.

2 Hjälpfunktion

Sats 2.1. *För varje heltal $x > 0$ finns ett unikt index j i Fibonacciserien så att*

$$F_j \leq x < F_{j+1}$$

Bevis. För $x = 1$ är det tillräckligt att titta på talserien (repetitionen av 1 gör det till ett specialfall). För $x > 1$ räcker det att se att Fibonacciserien är strikt ökande och alltid kommer att kunna omgärda vilket x som helst. □

Kalla funktionen i Sats 2.1 $J(x)$.

Sats 2.2. *För varje $x > 0$ gäller att*

$$0 \leq x - F_j < F_{j-1}$$

där $j = J(x)$.

Bevis. Vänster del av olikheten visas genom att subtrahera F_j från den vänstra olikheten i Sats 2.1. Höger del av olikheten visas genom att subtrahera F_j från högra delen av olikheten i Sats 2.1. Då fås

$$x - F_j < F_{j+1} - F_j$$

Med definitionen av Fibonacciserieen fås

$$x - F_j < F_j + F_{j-1} - F_j = F_{j-1}$$

□

Det intressanta med detta är att vi alltid kan subtrahera F_j och på så vis krympa talet. Som en följd kommer resten $(x - F_j)$ att understiga inte bara F_j utan till och med F_{j-1}. En annan intressant sak är att om $F_{j-1} = 1$, dvs $j = 2$ eller $j = 3$, kommer $x - F_j = 0$.

Fler bevis: om $j = J(x)$ så kommer $J(x - F_{J(x)}) < j$. Det betyder att varje gång vi har minskat x i algoritmen nedan så hoppar index j (minst) ett steg neråt.

3 Algoritm

Ett bevis för att det är möjligt att skriva alla $X > 0$ som en summa av Fibonaccital görs genom att en algoritm för det beskrivs.

$x \leftarrow X$
$j_{gammal} = J(X)$
while $x > 0$ **do**
  $j = J(x)$ {Vi vet att $j < j_{gammal}$}
  $j_{gammal} \leftarrow j$
  Lägg till tal j till talbasen.
  $x \leftarrow x - F_j$ {Vi vet att x nu antingen är noll, eller positivt och understiger F_{j-1} }
end while

I algoritmen krymps x för varje varv. Detta gör att vi på ändlig tid (för ändliga x) har hittat en lösning. Tillika krymper j varje varv, detta gör att varje tal i Fibonnaciserien kommer att användas högst en gång.